ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

KHONE SONEMANY

SỰ THÁC TRIỂN CỦA ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH QUANH CÁC TẬP CÓ ĐỘ ĐO HAUSDORFF (2n-1) -CHIỀU BẰNG 0

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

KHONE SONEMANY

SỰ THÁC TRIỂN CỦA ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH QUANH CÁC TẬP CÓ ĐỘ ĐO HAUSDORFF (2n-1) -CHIỀU BẰNG 0

Chuyên ngành : TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 60 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN THỊ TUYẾT MAI

Thái Nguyên, năm 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan, luận văn thạc sĩ chuyên ngành Toán Giải Tích **" Sự thác triển của ánh xạ chỉnh hình quanh các tập có độ đo Hausdorff (2n-1) -chiều bằng 0 "** được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của **TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai** và bản thân tác giả.

Trong quá trình nghiên cứu thực hiện luận văn, tác giả đã kế thừa, phát triển các kết quả của các nhà khoa học với sự trân trọng và biết ơn. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự đồng ý của đồng tác giả khi đưa vào luận văn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2017

Tác giả

Khone SONEMANY

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Cho D là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $E \subset D$ là một tập con đóng của $\mathbb{C}^n$. Kwack [7] đã chứng minh rằng nếu E là một tập giải tích có $\operatorname{codim} E \geq 1$ thì mọi ánh xạ chỉnh hình f từ $D \setminus E$ tới một không gian phức hyperbolic compact X có thể thác triển thành ánh xạ chỉnh hình từ D tới X. Đỗ Đức Thái trong [13] đã chứng minh kết quả tương tự với X là không gian đầy Caratheodory. Chú ý rằng, nếu E là một tập giải tích thì độ đo Hausdorff $(2n-1)$-chiều $\mathcal{H}_{2n-1}(E) = 0$.

Omar Alehyane và Hichame Amal [3] đã tổng quát hóa kết quả trên của Đỗ Đức Thái và đưa ra một định lý thác triển hội tụ kiểu Noguchi với ánh xạ chỉnh hình. Cụ thể là Omar Alehyane và Hichame Amal đã chứng minh định lý sau:

Cho D là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $E \subset D$ là một tập con đóng sao cho $\mathcal{H}_{2n-1}(E) = 0$. Khi đó mọi ánh xạ chỉnh hình f từ $D \setminus E$ tới một không gian đầy Caratheodory X có thể thác triển chỉnh hình từ D đến X, và nếu $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Hol(D \setminus E, X)$ hội tụ đều trên các tập con compact của $D \setminus E$ tới f, thì $\{\overline{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ đều tới $\overline{f}$ trên các tập con compact của D, trong đó $\overline{f} \in Hol(D, X)$ là sự thác triển của $f \in Hol(D \setminus E, X)$.

Omar Alehyane và Hichame Amal [3] đã chứng minh định lý trên không phải với kỹ thuật chứng minh của Kwack [7]. Đồng thời, hai nhà toán học này cũng chứng tỏ kỹ thuật của Kwack không thể sử dụng vào nghiên cứu bài toán sau:

Bài toán: Cho D là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$, $E \subset D$ là một tập con đóng sao cho $\mathcal{H}_1(E) = 0$ và X là không gian hyperbolic compact. Mọi ánh xạ chỉnh hình f từ $D \setminus E$ tới X có thể thác triển chỉnh hình được trên D hay không ?

Mục đích của luận văn là nghiên cứu kết quả của Omar Alehyane và Hichame Amal về sự thác triển của ánh xạ chỉnh hình quanh các tập đóng có độ đo Hausdorff $(2n - 1)$-chiều bằng 0 vào một không gian phức.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, nội dung của luận văn được trình bày trong 2 chương. Trong chương 1, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả liên quan đến nội dung chính của luận văn bao gồm: Ánh xạ chỉnh hình, không gian phức, không gian phức hyperbolic, không gian phức hyperbolic Caratheodory, tập cực, tập đa cực và một số độ đo: Độ đo hyperbolic, độ đo Caratheodory, độ đo Hausdorff , …

Chương 2 là nội dung chính của luận văn. Trong chương này chúng tôi trình bày lại một cách chi tiết kết quả nghiên cứu của Omar Alehyane và Hichame Amal.

Để hoàn thành khóa học, tôi đã nhận được sự giúp đỡ tận tình của thầy cô giáo trong Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các thầy cô.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai, cô đã tận tình chỉ bảo, định hướng chọn đề tài, truyền đạt kiến thức kinh nghiệm nghiên cứu để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Qua đây tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới các anh chị em, bạn bè, đã luôn động viên, cổ vũ, giúp đỡ cho tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn vô hạn tới những người thân trong gia đình đã luôn luôn quan tâm, khích lệ và luôn tin tưởng vào sự trưởng thành của tôi.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2017

Tác giả

Khone SONEMANY

Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Không gian phức

Định nghĩa 1.1.1 ([1]).

Giả sử X là một không gian tô pô Hausdorff.

+) Cặp (U,φ) được gọi là *một bản đồ địa phương* của X, trong đó U là tập mở trong X và $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ là ánh xạ, nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $\varphi(U)$ là tập mở trong $\mathbb{C}^n$.

ii) $\varphi : U \to \varphi(U)$ là một đồng phôi.

+) Họ $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i)\}_{i \in I}$ các bản đồ địa phương của X được gọi là một *tập bản đồ giải tích (atlas)* của X nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $\{U_i\}_{i \in I}$ là một phủ mở của X.

ii) Với mọi U_i, U_j mà $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, ánh xạ

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

là ánh xạ chỉnh hình.

+) Xét họ các atlas trên X. Hai atlas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ được gọi là *tương đương* nếu hợp $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ là một atlas. Đây là một quan hệ tương đương trên tập các atlas. Mỗi lớp tương đương xác định một cấu trúc khả vi phức trên X, và X cùng với cấu trúc khả vi phức trên đó được gọi là một *đa tạp phức n chiều*.

Ví dụ.

1. Giả sử D là miền trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó, D là một đa tạp phức n chiều với bản đồ địa phương $\{(D, Id_D)\}$.

2. Đa tạp xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Xét $U_i = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in P^n(C) \mid z_i \neq 0\}$, với $i = 0,1,\dots,n$. Rõ ràng $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ là một phủ mở của $P^n(C)$.

Xét các đồng phôi $\varphi_i : U_i \to C^n$

$$\left[z_0 : z_1 : \dots : z_n\right] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

Ta có

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

$$\left(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n\right) \mapsto \left(\frac{z_k}{z_j}\right)_{k \neq j} ;\ k = 0, \dots, m; z_i = 1.$$

Rõ ràng $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ là ánh xạ chỉnh hình. Vậy $P^n(C)$ là một đa tạp phức n chiều và gọi là đa tạp xạ ảnh n chiều.

Định nghĩa 1.1.2 ([1]).

Giả sử Z là đa tạp phức. Một không gian phức đóng X là một tập con đóng của Z mà về mặt địa phương được xác định bởi hữu hạn các phương trình giải tích. Tức là, với $x_0 \in X$ tồn tại lân cận mở V của x trong Z và hữu hạn các hàm chỉnh hình $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ trên V sao cho

$$X \cap V = \left\{x \in V \mid \varphi_i(x) = 0, i = 1, \dots, m\right\}.$$

1.2. Ánh xạ chỉnh hình

Định nghĩa 1.2.1 ([1]).

+) Giả sử X là một tập mở trong C^n và $f : X \to C$ là một hàm số. Hàm f được gọi là *khả vi phức* tại $x_0 \in X$ nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính $l : C^n \to C$ sao cho

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)|}{|h|} = 0,$$

trong đó

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{C}^n \text{ và } |h| = \left(\sum_{i=1}^{n} |h_i|^2\right)^{1/2}.$$

+) Hàm f được gọi là *chỉnh hình tại* $x_0 \in X$ nếu f khả vi phức trong một lân cận nào đó của x_0 và được gọi là *chỉnh hình trên* X nếu f chỉnh hình tại mọi điểm thuộc X.

+) Một ánh xạ $f : X \to \mathbb{C}^m$ có thể viết dưới dạng $f = (f_1, \ldots, f_m)$, trong đó $f_i = p_i \circ f : X \to \mathbb{C}, i = 1, \ldots, m$ là các hàm tọa độ. Khi đó f được gọi là *chỉnh hình* trên X nếu f_i chỉnh hình trên X với mọi $i = 1, \ldots, m$.

+) Ánh xạ $f : X \to f(X) \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là *song chỉnh hình* nếu f là song ánh, chỉnh hình và f^{-1} cũng là ánh xạ chỉnh hình.

1.2.1. Ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức

Định nghĩa 1.2.2 ([1]).

Giả sử X là một không gian con phức trong đa tạp phức Z. Hàm $f : X \to \mathbb{C}$ được gọi là *chỉnh hình* nếu với mỗi điểm $x \in X$ tồn tại một lân cận $U(x) \subset Z$ và một hàm chỉnh hình $\hat{f}$ trên U sao cho

$$\hat{f}|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}.$$

Giả sử $f : X \to Y$ là ánh xạ giữa hai không gian phức X và Y. f được gọi là *chỉnh hình* nếu với mỗi hàm chỉnh hình g trên một tập con mở V của Y, hàm hợp $g \circ f$ là hàm chỉnh hình trên $f^{-1}(V)$.

Định lý 1.2.1 ([1]).

Giả sử $\{f_n : X \to Y\}$ *là dãy các ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức* X, Y. *Nếu* $\{f_n\}$ *hội tụ đều tới* f *trong* $Hol(X, Y)$ *thì* f *là ánh xạ chỉnh* *hình. (trong đó $Hol(X,Y)$ là tập các ánh xạ chỉnh hình từ X vào Y được trang bị tô pô compact mở).*

1.2.2. Một số định lý về thác triển

Định lý 1.2.2 (Hartogs) ([2]).

Giả sử cho các miền $\dot{D} \subset \mathbb{C}^{n-1}(\dot{Z})$ và $D_n \subset \mathbb{C}(Z_n)$; hàm f tùy ý chỉnh hình trong lân cận (theo nghĩa $\mathbb{C}^n$) của tập

$$M = (\dot{D} \times \partial D_n) \cup (\{\dot{Z}^{\circ}\} \times \bar{D}_n), \qquad (1.1)$$

trong đó $\dot{Z}^{\circ} \in \dot{D}$, thác triển chỉnh hình được vào toàn miền $D = \dot{D} \times D_n$.

Định lý 1.2.3 ([2]).

Giả sử M là tập mỏng trong miền $D \subset \mathbb{C}^n$ và hàm f chỉnh hình trong $D \setminus M$. Nếu f giới nội địa phương, thì nó thác triển được một cách duy nhất thành hàm f chỉnh hình trong D.

1.3. Không gian phức hyperbolic Caratheodory

1.3.1. Giả khoảng cách Caratheodory

Định nghĩa 1.3.1 ([8]).

Cho X là một không gian phức, $Hol(X,D)$ là tập các ánh xạ chỉnh hình $f : X \to D$. Đặt

$$C_X(p,q) = \sup_f \rho(f(p), f(q)), \text{ với mọi } p,q \in X.$$

Trong đó supremum lấy trên tất cả các $f \in Hol(X,D)$.

Khi đó C_X được gọi là *giả khoảng cách Caratheodory trên X*.

Chú ý: Vì D là thuần nhất, ta chỉ cần lấy supremum trên họ con

$$\mathcal{F} = \{f \in Hol(X,D); f(p) = 0\}.$$

Mệnh đề 1.3.1 ([8]).

1) Nếu X và Y là hai không gian phức, thì $C_Y(f(p), f(q)) \le C_X(p,q)$ với $f \in Hol(X,Y)$ và $p,q \in X$, tức là $f : X \to Y$ là giảm khoảng cách đối với các giả khoảng cách Caratheodory.